HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO · SELECTIVIDAD

Bolzano, Rolle y valor medio

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/teoremas-bolzano-rolle-valor-medio/**

1 Demuestra que $x^3 - 3x + 1 = 0$ tiene tres soluciones reales distintas.

2 Comprueba que $f(x) = x^3 - x$ cumple Rolle en $[-1, 1]$ y halla los valores de c.

3 Halla el punto del teorema del valor medio para $f(x) = \sqrt{x}$ en $[1, 4]$.

4 ¿Se puede aplicar Rolle a $f(x) = |x - 1|$ en $[0, 2]$? Razona la respuesta.

5 Demuestra que la ecuación $x \cdot 2^x = 1$ tiene solución en $(0, 1)$.

6 Demuestra que $f(x) = x^5 + x - 1$ tiene una única raíz real.

7 Halla a para que $f(x) = x^2 + ax + 5$ cumpla las hipótesis de Rolle en $[1, 3]$, y calcula el c correspondiente.

8 Un coche recorre 150 km en 1 h 30 min. Demuestra que en algún instante su velocidad fue exactamente 100 km/h.

9

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2024

Para la función $f(x) = x^4 + \pi x^3 + \pi^2 x^2 + \pi^3 x + \pi^4$, se pide:

a) (0,5 puntos) Calcular la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en $x = \pi$.

b) (1 punto) Probar que $f(x)$ tiene, al menos, un punto con derivada nula en el intervalo $(-\pi, 0)$ utilizando justificadamente el teorema de Rolle. Probar de nuevo la misma afirmación utilizando adecuadamente, esta vez, el teorema de Bolzano.

c) (1 punto) Si $g(x) = f(-x)$, calcular el área entre las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Demuestra que la ecuación $\cos x = x$ tiene al menos una solución en el intervalo $(0, 1)$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Bolzano, Rolle y valor medio

1 $f(x) = x^3 - 3x + 1$ es continua. Calcula: $f(-2) = -1$, $f(-1) = 3$, $f(0) = 1$, $f(1) = -1$, $f(2) = 3$.

Hay cambio de signo en $(-2, -1)$, en $(0, 1)$ y en $(1, 2)$. Por Bolzano, hay una raíz en cada intervalo. Son tres intervalos disjuntos: tres raíces distintas. Y un polinomio de grado 3 no puede tener más.

2 Polinomio: continua y derivable. $f(-1) = 0 = f(1)$.

$f'(x) = 3x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \approx \pm 0{,}577$. Los dos están en $(-1, 1)$: hay dos valores de c.

3 Pendiente media: $\frac{2-1}{4-1} = \frac{1}{3}$.

$f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}} = \frac{1}{3} \Rightarrow \sqrt{c} = \frac{3}{2} \Rightarrow c = \frac{9}{4} = 2{,}25 \in (1, 4)$.

4 Es continua en $[0, 2]$ y $f(0) = 1 = f(2)$. Pero en $x = 1$ tiene un pico: no es derivable ahí, y $1 \in (0, 2)$.

No se puede aplicar. De hecho no hay ningún c con $f'(c) = 0$: la derivada vale -1 a la izquierda de 1 y 1 a la derecha.

5 Sea $g(x) = x \cdot 2^x - 1$, continua. $g(0) = -1 < 0$ y $g(1) = 2 - 1 = 1 > 0$.

Por Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ con $g(c) = 0$, es decir, $c \cdot 2^c = 1$.

6 Existencia: $f(0) = -1 < 0$ y $f(1) = 1 > 0$ y f es continua: hay una raíz en $(0, 1)$ por Bolzano.

Unicidad: si hubiera dos raíces, Rolle daría un punto con $f' = 0$. Pero $f'(x) = 5x^4 + 1 \geq 1 > 0$. No puede haber dos.

7 Es un polinomio: solo hay que imponer $f(1) = f(3)$. $f(1) = 6 + a$ y $f(3) = 14 + 3a$.

$6 + a = 14 + 3a \Rightarrow a = -4$. Con ese valor, $f'(x) = 2x - 4 = 0 \Rightarrow c = 2 \in (1, 3)$.

8 Sea $s(t)$ la posición en kilómetros en el instante t (en horas). Es continua en $[0; 1{,}5]$ y derivable en $(0; 1{,}5)$.

La velocidad media es $\frac{s(1{,}5) - s(0)}{1{,}5} = \frac{150}{1{,}5} = 100$ km/h. Por el valor medio, existe $c \in (0; 1{,}5)$ con $s'(c) = 100$: en ese instante la velocidad fue exactamente 100 km/h.

9 **a)** Se necesita $f(\pi)$ y $f'(\pi)$. Con $f'(x) = 4x^3 + 3\pi x^2 + 2\pi^2 x + \pi^3$:

$$f(\pi) = \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 + \pi^4 = 5\pi^4, \qquad f'(\pi) = (4+3+2+1)\,\pi^3 = 10\pi^3$$

La recta tangente es $y - 5\pi^4 = 10\pi^3\,(x - \pi)$, es decir, $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$.

b) Con Rolle. f es un polinomio: continua en $[-\pi, 0]$ y derivable en $(-\pi, 0)$. Además $f(-\pi) = \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 - \pi^4 + \pi^4 = \pi^4$ y $f(0) = \pi^4$. Son iguales, así que existe $c \in (-\pi, 0)$ con $f'(c) = 0$.

b) Con Bolzano. Se aplica a la función f', que también es un polinomio y por tanto continua. Calcula $f'(-\pi) = -4\pi^3 + 3\pi^3 - 2\pi^3 + \pi^3 = -2\pi^3 < 0$ y $f'(0) = \pi^3 > 0$. Signos contrarios: existe $c \in (-\pi, 0)$ con $f'(c) = 0$.

c) Es $g(x) = x^4 - \pi x^3 + \pi^2 x^2 - \pi^3 x + \pi^4$. Al restar, los términos pares se cancelan:

$$f(x) - g(x) = 2\pi x^3 + 2\pi^3 x \geq 0 \quad \text{si } x \geq 0$$

En $[0, \pi]$ se tiene $x \geq 0$, luego $f \geq g$ y el área es la integral de la diferencia:

Integra y aplica la regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi} \left(2\pi x^3 + 2\pi^3 x\right) dx = \left[\frac{\pi x^4}{2} + \pi^3 x^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi^5}{2} + \pi^5 = \frac{3\pi^5}{2}$$

Resultado: a) $y = 10\pi^3 x - 5\pi^4$ · **b)** por Rolle ($f(-\pi) = f(0)$) y por Bolzano ($f'(-\pi) < 0 < f'(0)$) existe $c \in (-\pi, 0)$ con $f'(c) = 0$ · **c)** área $= \dfrac{3\pi^5}{2}$.

10 Pasa todo a un lado: $f(x) = \cos x - x$. Hay que probar que $f(x) = 0$ tiene solución.

f es continua en $[0, 1]$ porque es la resta de dos funciones continuas, el coseno y x.

$f(0) = \cos 0 - 0 = 1 > 0$. Y $f(1) = \cos 1 - 1 \approx 0{,}54 - 1 = -0{,}46 < 0$ (con la calculadora en radianes).

Signos contrarios en los extremos: por el teorema de Bolzano, existe $c \in (0, 1)$ tal que $f(c) = 0$, es decir, $\cos c = c$.

Resultado: Existe al menos un $c \in (0, 1)$ con $\cos c = c$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98