HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO

Regla de L'Hôpital

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/regla-de-lhopital/**

1 Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin 5x}{2x}$.

2 Calcula $\lim_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

3 Calcula $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x}$.

4 Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.

5 Calcula $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}$.

6 Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$.

7 SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2024

Calcule:

a) (1,25 puntos) $\displaystyle\int_1^e (x+2)\ln x\, dx$.

b) (1,25 puntos) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \left(\text{tg}\,\dfrac{x}{2}\right)^{\left(\frac{1}{\cos x}\right)}$.

8 EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{2x}-1}{\sin 3x}$.

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\lim_{x \to \infty} \dfrac{x^2}{e^x}$ y $\lim_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Regla de L'Hôpital

1 Es $\frac{0}{0}$. Derivando: $\frac{5\cos 5x}{2} \to \frac{5}{2}$.

2 Es $\frac{0}{0}$. Derivando: $\frac{1/x}{1} \to 1$.

3 Es $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando tres veces: $\frac{3x^2}{e^x}$, $\frac{6x}{e^x}$, $\frac{6}{e^x} \to 0$.

4 Es $\frac{0}{0}$. Derivando: $\frac{\sin x}{2x}$, otra vez $\frac{0}{0}$. Derivando: $\frac{\cos x}{2} \to \frac{1}{2}$.

5 Es $\frac{\infty}{\infty}$. Derivando: $\frac{1/x}{1/(2\sqrt{x})} = \frac{2}{\sqrt{x}} \to 0$.

6 Es $\frac{0}{0}$. Derivando: $\frac{\sec^2 x - 1}{3x^2} = \frac{\tan^2 x}{3x^2}$.

Como $\frac{\tan x}{x} \to 1$, el límite es $\frac{1}{3}$.

7 **a)** Producto de un polinomio y un logaritmo: se hace por partes, derivando el logaritmo. Tomamos $u = \ln x$, $dv = (x+2)\,dx$, y entonces $du = \frac{dx}{x}$ y $v = \frac{x^2}{2} + 2x$.

Aplicamos $\int u\,dv = uv - \int v\,du$ y usamos la regla de Barrow:

$$\int_1^e (x+2)\ln x\,dx = \left[\left(\frac{x^2}{2} + 2x\right)\ln x\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x}{2} + 2\right)dx = \frac{e^2}{2} + 2e - \left[\frac{x^2}{4} + 2x\right]_1^e$$

El primer corchete vale $\left(\frac{e^2}{2} + 2e\right)\cdot 1 - 0$ (porque $\ln e = 1$ y $\ln 1 = 0$). El segundo da $\frac{e^2}{4} + 2e - \frac{1}{4} - 2$. Restando: $\frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} + 2 = \frac{e^2+9}{4}$.

b) Al sustituir, $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ y el exponente $\frac{1}{\cos x} \to \infty$: es una indeterminación 1^∞. Se escribe como una exponencial: $\lim(\ldots) = e^L$, con $L = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\ln\left(\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$.

Ese límite es $\frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0}$, así que se aplica la regla de L'Hôpital. La derivada del numerador es $\frac{1}{\operatorname{tg}(x/2)}\cdot\frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}\right)$ y la del denominador, $-\operatorname{sen} x$.

En $x = \frac{\pi}{2}$ la tangente vale 1, así que el numerador derivado vale $\frac{1}{2}\cdot 2 = 1$ y el denominador derivado, -1:

$$L = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\frac{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}{2\operatorname{tg}(x/2)}}{-\operatorname{sen} x} = \frac{1}{-1} = -1$$

Por tanto, el límite pedido es $e^L = e^{-1}$.

Resultado: a) $\frac{e^2+9}{4}$ · **b)** $e^{-1} = \frac{1}{e}$.

8 Sustituyendo: $\dfrac{e^0-1}{\sin 0}=\dfrac{0}{0}$. Se puede aplicar la regla.

Derivamos arriba y abajo:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2e^{2x}}{3\cos 3x}=\frac{2\cdot 1}{3\cdot 1}=\frac{2}{3}$$

Resultado: El límite vale $\dfrac{2}{3}$.

9 Da $\dfrac{0}{0}$. Primera derivada: $\lim_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{3x^2}$, otra vez $\dfrac{0}{0}$.

Segunda derivada: $\lim_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{6x}$, otra vez $\dfrac{0}{0}$.

Tercera derivada:

$$\lim_{x\to 0}\frac{-\cos x}{6}=-\frac{1}{6}$$

Resultado: El límite vale $-\dfrac{1}{6}$.

10 El primero es $\dfrac{\infty}{\infty}$. Derivamos: $\dfrac{2x}{e^x}$, todavía $\dfrac{\infty}{\infty}$. Otra vez: $\dfrac{2}{e^x}\to 0$.

El segundo, también $\dfrac{\infty}{\infty}$: derivamos y queda $\dfrac{1/x}{1}=\dfrac{1}{x}\to 0$.

Resultado: Los dos límites valen 0: la exponencial vence al polinomio y el polinomio vence al logaritmo.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98