HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO

Problemas de optimización

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/problemas-optimizacion/**

1 Dos números positivos suman 30. ¿Cuáles tienen el producto máximo?

2 Un rectángulo de 64 m^2 de área. ¿Qué dimensiones dan el perímetro mínimo?

3 Un granjero tiene 100 m de valla para cercar un campo rectangular junto a un río (el lado del río no se cierra). ¿Qué dimensiones maximizan el área?

4 Halla el punto de la recta $y = 2x + 1$ más cercano al origen.

5 Dos números positivos tienen producto 16. ¿Cuáles hacen mínima su suma?

6 Entre todos los rectángulos inscritos en una circunferencia de radio 5, ¿cuál tiene el área máxima?

7

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2026

Se quiere enlosar un jardín con forma de triángulo rectángulo de catetos 42 m y 56 m. Dentro del jardín se va a diferenciar un espacio rectangular techado de forma que dos de sus lados sean paralelos a los catetos del triángulo, un vértice coincida con el vértice del ángulo recto del triángulo y el vértice opuesto esté sobre su hipotenusa.

Alicatar la parte cubierta cuesta 30 euros por metro cuadrado y la parte no techada, 50 euros por metro cuadrado, pues las baldosas llevan un tratamiento especial resistente al agua. Calcule las dimensiones de la parte techada que hacen que el coste de instalar el suelo en el jardín sea mínimo.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Con 40 m de valla se quiere cercar un rectángulo. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

De una lámina cuadrada de 12 dm de lado se recortan cuadrados de lado x en las esquinas y se doblan los lados para hacer una caja sin tapa. ¿Qué x da el volumen máximo?

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Halla los puntos de la parábola $y = x^2$ más cercanos al punto $(0, 3)$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Problemas de optimización

1 $P(x) = x(30 - x) = 30x - x^2$. $P'(x) = 30 - 2x = 0$ da $x = 15$. $P'' = -2 < 0$.

Son 15 y 15, con producto 225.

2 $y = \dfrac{64}{x}$ y $P(x) = 2x + \dfrac{128}{x}$. $P'(x) = 2 - \dfrac{128}{x^2} = 0$ da $x = 8$.

$P''(8) = \dfrac{256}{512} > 0$: mínimo. Es un cuadrado de 8×8 m, con perímetro 32 m.

3 Lados x (dos de ellos) y y (paralelo al río): $2x + y = 100$, así que $y = 100 - 2x$.

$A(x) = x(100 - 2x)$. $A'(x) = 100 - 4x = 0$ da $x = 25$, $y = 50$.

$A'' = -4 < 0$. Área máxima: $25 \cdot 50 = 1250$ m^2.

4 $d^2(x) = x^2 + (2x + 1)^2 = 5x^2 + 4x + 1$. $\left(d^2\right)' = 10x + 4 = 0$ da $x = -\dfrac{2}{5}$.

Entonces $y = \dfrac{1}{5}$. El punto es $\left(-\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$, a distancia $\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ del origen.

5 $S(x) = x + \dfrac{16}{x}$. $S'(x) = 1 - \dfrac{16}{x^2} = 0$ da $x = 4$ (positivo).

$S''(4) = \dfrac{32}{64} > 0$: mínimo. Son 4 y 4, con suma 8.

6 La diagonal mide 10. Lados x y $\sqrt{100 - x^2}$. Maximizamos $A^2 = x^2(100 - x^2) = 100x^2 - x^4$.

Derivada: $200x - 4x^3 = 0$ da $x^2 = 50$, así que $x = 5\sqrt{2}$.

El otro lado también es $\sqrt{100 - 50} = 5\sqrt{2}$: es un cuadrado, de área 50.

7 **Dibujo y variables.** Ponemos el ángulo recto en el origen, el cateto de 56 m sobre el eje X y el de 42 m sobre el eje Y. El rectángulo techado tiene un vértice en el origen y el opuesto en (x, y), que debe estar en la hipotenusa. Sus lados son x e y, con $0 < x < 56$.

Relación entre las variables. La hipotenusa une $(56, 0)$ y $(0, 42)$, y su ecuación es $\dfrac{x}{56} + \dfrac{y}{42} = 1$.

Despejando: $y = 42 - \dfrac{3x}{4} = \dfrac{168 - 3x}{4}$.

Función de coste. El jardín mide $\dfrac{56 \cdot 42}{2} = 1176$ m^2. La parte techada es xy (a 30 euros) y la no techada es $1176 - xy$ (a 50 euros):

$C = 30xy + 50(1176 - xy) = 58800 - 20xy$. Sustituimos y para dejarla en una sola variable:

$$C(x) = 58800 - 20x \cdot \frac{168 - 3x}{4} = 58800 - 5x(168 - 3x) = 15x^2 - 840x + 58800$$

Derivada. $C'(x) = 30x - 840 = 0 \Rightarrow x = 28$, que está dentro de $(0, 56)$.

Es un mínimo: $C''(x) = 30 > 0$ (o: $C' < 0$ antes de 28 y $C' > 0$ después). Y como C es una parábola que se abre hacia arriba, es el mínimo de todo el intervalo.

La otra dimensión: $y = \dfrac{168 - 3 \cdot 28}{4} = 21$. El coste mínimo sería $C(28) = 11760 - 23520 + 58800 = 47040$ euros. Fíjate en que $C = 58800 - 20xy$: como la parte techada sale más barata, minimizar el coste es lo mismo que maximizar el área techada xy.

Resultado: La parte techada mide 28 m (paralelo al cateto de 56 m) por 21 m (paralelo al de 42 m).

8 Lados x e y. Área $A = x\,y$. El perímetro fija $2x + 2y = 40$, es decir $y = 20 - x$.

Función de una variable, con $0 < x < 20$:

$$A(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$$

$A'(x) = 20 - 2x = 0$ da $x = 10$.

$A''(x) = -2 < 0$: es un máximo.

Entonces $y = 20 - 10 = 10$.

Resultado: Un cuadrado de 10×10 m, con área máxima 100 m^2.

9 La base queda de lado $12 - 2x$ y la altura es x. El dominio es $0 < x < 6$.

Volumen:

$$V(x) = x(12 - 2x)^2 = 4x^3 - 48x^2 + 144x$$

Deriva:

$$V'(x) = 12x^2 - 96x + 144 = 12(x - 2)(x - 6) = 0$$

Las soluciones son $x = 2$ y $x = 6$. Pero $x = 6$ está fuera del dominio abierto (el volumen sería 0). Nos quedamos con $x = 2$.

$V''(x) = 24x - 96$, y $V''(2) = -48 < 0$: máximo.

$V(2) = 2 \cdot 8^2 = 128$.

Resultado: Se recortan cuadrados de 2 dm de lado. Volumen máximo: 128 dm^3.

10 Un punto genérico de la parábola es (x, x^2) y el otro punto es $(0, 3)$.

Cuadrado de la distancia en función de x:

$$d^2(x) = x^2 + (x^2 - 3)^2 = x^4 - 5x^2 + 9$$

Deriva:

$$\left(d^2\right)' = 4x^3 - 10x = 2x(2x^2 - 5) = 0$$

Soluciones: $x = 0$ y $x = \pm\sqrt{5/2}$.

$d^2(0) = 9$ y $d^2\left(\pm\sqrt{5/2}\right) = \dfrac{25}{4} - \dfrac{25}{2} + 9 = \dfrac{11}{4}$. El menor es $\dfrac{11}{4}$ (y en $x = 0$ hay un máximo local de d^2: $\left(d^2\right)''(0) = -10 < 0$).

La ordenada es $y = x^2 = \dfrac{5}{2}$.

Resultado: Los puntos $\left(\pm\sqrt{5/2},\ \frac{5}{2}\right)$, a distancia $\dfrac{\sqrt{11}}{2} \approx 1{,}66$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98