HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO · SELECTIVIDAD

Operaciones con matrices

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/matrices-operaciones/**

1 Calcula $P \cdot Q$ con $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2 A tiene dimensión 3×2 y B tiene dimensión 2×4. ¿Se puede hacer $A \cdot B$? ¿Y $B \cdot A$?

3 Calcula la inversa de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

4 ¿Tiene inversa $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$?

5

Calcula A^2 con $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2024 (COINCIDENCIAS)

Sean X e Y dos matrices reales y cuadradas de orden dos tales que $5X - 3Y = A$ y $3X + 6Y = B$, con $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix}$. Se pide:

a) (1,5 puntos) Hallar X, Y y X^{-1}.

b) (1 punto) Calcular A^{127}.

7

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Calcula $A + B$ y $3A - 2B$.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Con las mismas A y B, calcula $A \cdot B$ y $B \cdot A$.

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Sean $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ (2×3) y $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ (3×2). Calcula $C \cdot D$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula la inversa de $N = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y comprueba el resultado.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Operaciones con matrices

1 $P \cdot Q = \begin{pmatrix} 2-2 & 8-0 \\ 0+6 & 0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}$.

2 $A \cdot B$ sí, y es de dimensión 3×4.

$B \cdot A$ no: B tiene 4 columnas y A tiene 3 filas.

3 $\det = 6 - 5 = 1$.

La inversa es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$.

4 $\det = 6 - 6 = 0$. No tiene inversa.

5 $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1+0 & 1+1 \\ 0+0 & 0+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

6 **a)** Las matrices se suman y se multiplican por números como los números, así que esto es un sistema de dos ecuaciones y se resuelve por reducción. Multiplicamos la primera por 2 y sumamos la segunda: $10X - 6Y + 3X + 6Y = 2A + B$, es decir, $13X = 2A + B$.

Calculamos $2A + B$ y dividimos entre 13:

$$2A + B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 0 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para Y usamos la primera ecuación: $3Y = 5X - A = \begin{pmatrix} 15 & 0 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix}$, y por tanto $Y = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$.

Comprobamos con la segunda ecuación: $3X + 6Y = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 30 & 2 \\ -12 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 39 & 2 \\ -15 & 13 \end{pmatrix} = B$.

Sale bien.

Inversa de X. $|X| = 3 \cdot 1 - 0 \cdot (-1) = 3 \neq 0$, así que existe. En una 2×2 se intercambian los elementos de la diagonal, se cambia el signo de los otros dos y se divide entre el determinante: $X^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$.

b) Una potencia tan alta no se multiplica 127 veces: se busca un patrón. $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I$.

Como $127 = 2 \cdot 63 + 1$, queda $A^{127} = (A^2)^{63}A = (-I)^{63}A = -A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, porque 63 es impar y $(-I)^{63} = -I$.

Resultado: a) $X = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 5 & 1/3 \\ -2 & 5/3 \end{pmatrix}$, $X^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1 \end{pmatrix}$ · **b)** $A^{127} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

7 Suma elemento a elemento:

$$A+B=\begin{pmatrix}1+0 & 2+1\\ 3-1 & 4+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$$

Primero los productos por números: $3A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{pmatrix}$ y $2B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -2 & 4\end{pmatrix}$.

Restamos:

$$3A-2B=\begin{pmatrix}3-0 & 6-2\\ 9+2 & 12-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 8\end{pmatrix}$$

Resultado: $A+B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}$ y $3A-2B=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 11 & 8\end{pmatrix}$

8 Fila 1 por columna 1: $1\cdot 0+2\cdot(-1)=-2$. Fila 1 por columna 2: $1\cdot 1+2\cdot 2=5$.

Fila 2 por columna 1: $3\cdot 0+4\cdot(-1)=-4$. Fila 2 por columna 2: $3\cdot 1+4\cdot 2=11$.

Cambiamos el orden, $B\cdot A$:

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}0\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+1\cdot 4\\ -1\cdot 1+2\cdot 3 & -1\cdot 2+2\cdot 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$$

Resultado: $A\cdot B=\begin{pmatrix}-2 & 5\\ -4 & 11\end{pmatrix}$ y $B\cdot A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\end{pmatrix}$. Son distintas: el producto **no es conmutativo**.

9 C tiene 3 columnas y D tiene 3 filas: se puede. El resultado es 2×2.

Elemento $(1,1)$: $1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1=4$. Elemento $(1,2)$: $1\cdot 1+0\cdot(-1)+2\cdot 4=9$.

Elemento $(2,1)$: $-1\cdot 2+3\cdot 0+1\cdot 1=-1$. Elemento $(2,2)$: $-1\cdot 1+3\cdot(-1)+1\cdot 4=0$.

Resultado: $C\cdot D=\begin{pmatrix}4 & 9\\ -1 & 0\end{pmatrix}$

10 Determinante: $4\cdot 2-2\cdot 3=2$. No es cero, así que existe la inversa.

Intercambiamos la diagonal, cambiamos el signo de la otra y dividimos entre el determinante:

$$N^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$$

Comprobación: $N\cdot N^{-1}=\begin{pmatrix}4-3 & -4+4\\ 3-3 & -3+4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. Es la identidad.

Resultado: $N^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -\frac{3}{2} & 2\end{pmatrix}$

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98