HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 1.º Y 2.º DE BACHILLERATO · SELECTIVIDAD

Tipos de integrales

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/integrales-tipos/**

1 Calcula $\int (4x^3 - 6x + 1)\,dx$.

2 Calcula $\int \dfrac{2x}{x^2 + 4}\,dx$.

3 Calcula $\int x\,e^{2x}\,dx$.

4 Calcula $\int_0^3 (x^2 + 2x)\,dx$.

5

Calcula $\displaystyle\int \frac{1}{(x-1)(x+2)}\,dx$.

6

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2025 (COINCIDENTES)

Se considera la función $f(x) = \dfrac{x^3 - x^2}{x^2 + 9}$. Calcule la primitiva $F(x)$ de $f(x)$ tal que $F(0) = \ln 3$.

7

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\displaystyle\int (3x^2 - 4x + 5)\,dx$.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\displaystyle\int 6x\,(x^2+1)^4\,dx$.

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\displaystyle\int x \ln x\,dx$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\int \frac{3x+5}{(x+1)(x+3)}\,dx$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Tipos de integrales

1 $x^4 - 3x^2 + x + C$.

2 Con $t = x^2 + 4$, $dt = 2x\,dx$ y queda $\int \frac{dt}{t} = \ln|t|$.

Resultado: $\ln(x^2 + 4) + C$.

3 Por partes con $u = x$ y $dv = e^{2x}dx$. Entonces $v = \frac{e^{2x}}{2}$.

$\frac{x\,e^{2x}}{2} - \int \frac{e^{2x}}{2}\,dx = \frac{x\,e^{2x}}{2} - \frac{e^{2x}}{4} + C$.

4 Primitiva: $F(x) = \frac{x^3}{3} + x^2$.

$F(3) = 9 + 9 = 18$ y $F(0) = 0$. Resultado: 18.

5 $\frac{1}{(x-1)(x+2)} = \frac{1/3}{x-1} - \frac{1/3}{x+2}$.

Resultado: $\frac{1}{3}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + C$.

6 El grado del numerador (3) es mayor que el del denominador (2), así que primero se **divide**. Como $(x-1)(x^2+9) = x^3 - x^2 + 9x - 9$, queda $x^3 - x^2 = (x-1)(x^2+9) + (9 - 9x)$: cociente $x - 1$ y resto $9 - 9x$.

Así, separando el resto en dos fracciones:

$$f(x) = x - 1 + \frac{9 - 9x}{x^2 + 9} = x - 1 + \frac{9}{x^2 + 9} - \frac{9x}{x^2 + 9}$$

Cada trozo es una integral conocida. El polinomio: $\int (x - 1)\,dx = \frac{x^2}{2} - x$.

El trozo con x en el numerador es un logaritmo, porque $(x^2 + 9)' = 2x$: $\int \frac{9x}{x^2 + 9}\,dx = \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9)$.

El trozo constante es un arcotangente, porque $\frac{9}{x^2 + 9} = \frac{1}{1 + (x/3)^2}$: $\int \frac{9}{x^2 + 9}\,dx = 3\arctan\frac{x}{3}$.

Juntando las tres, con la constante de integración:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3\arctan\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + C$$

La condición. $F(0) = 0 - 0 + 3\arctan 0 - \frac{9}{2}\ln 9 + C = -\frac{9}{2} \cdot 2\ln 3 + C = -9\ln 3 + C$. Como debe valer $\ln 3$: $C = \ln 3 + 9\ln 3 = 10\ln 3$.

Resultado: $F(x) = \frac{x^2}{2} - x + 3\arctan\frac{x}{3} - \frac{9}{2}\ln(x^2 + 9) + 10\ln 3$.

7 Integras término a término: $\frac{3x^3}{3} - \frac{4x^2}{2} + 5x$.

Simplificas: $x^3 - 2x^2 + 5x + C$.

Compruebas derivando: $(x^3 - 2x^2 + 5x)' = 3x^2 - 4x + 5$. Correcto.

Resultado: $x^3 - 2x^2 + 5x + C$

8 Llamas $t = x^2 + 1$. Entonces $dt = 2x\,dx$, así que $6x\,dx = 3\,dt$.

Queda $\int 3t^4\,dt = \dfrac{3t^5}{5} + C$.

Vuelves a x: $\dfrac{3}{5}(x^2+1)^5 + C$.

Compruebas: $\left[\dfrac{3}{5}(x^2+1)^5\right]' = \dfrac{3}{5}\cdot 5\,(x^2+1)^4 \cdot 2x = 6x(x^2+1)^4$. Correcto.

Resultado: $\dfrac{3}{5}(x^2+1)^5 + C$

9 Tomas $u = \ln x$ y $dv = x\,dx$. Entonces $du = \dfrac{1}{x}\,dx$ y $v = \dfrac{x^2}{2}$.

Aplicas la fórmula:

$$\int x\ln x\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x}{2}\,dx$$

Integras lo que queda: $\int \dfrac{x}{2}\,dx = \dfrac{x^2}{4}$.

Compruebas derivando: $x\ln x + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x}{2} = x\ln x$. Correcto.

Resultado: $\dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C$

10 Escribes $\dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{B}{x+3}$. Quitas denominadores: $3x + 5 = A(x+3) + B(x+1)$.

Con $x = -1$: $2 = 2A$, luego $A = 1$. Con $x = -3$: $-4 = -2B$, luego $B = 2$.

Integras: $\int \dfrac{1}{x+1}\,dx + \int \dfrac{2}{x+3}\,dx = \ln|x+1| + 2\ln|x+3| + C$.

Compruebas: $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} = \dfrac{x+3+2x+2}{(x+1)(x+3)} = \dfrac{3x+5}{(x+1)(x+3)}$. Correcto.

Resultado: $\ln|x+1| + 2\ln|x+3| + C$

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98