HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO · SELECTIVIDAD

Integrales por cambio de variable

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/integrales-cambio-variable/**

1 $\int x^2\sqrt{x^3+1}\,dx$

2 $\int \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x}\,dx$

3 $\int \frac{(\ln x)^2}{x}\,dx$

4 $\int \frac{2x+1}{x^2+x+5}\,dx$

5

$$\int \frac{x}{\sqrt{x-1}}\,dx$$

6

$$\int \operatorname{sen}^3 x\,dx$$

7

$$\int_1^e \frac{(1+\ln x)^2}{x}\,dx$$

8

$$\int_0^1 \frac{x}{x^4+1}\,dx$$

9

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · EXTRAORDINARIA 2026 (COINCIDENTES)

Para la función $f(x) = \operatorname{sen}\left(\pi\,|x^2-1|\right)$, calcule $\displaystyle\int_0^2 x\,f(x)\,dx$.

10

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2022

Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^3 e^{-1/x^2} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Calcule la integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{f(x)}{x^6}\, dx$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Integrales por cambio de variable

1 $t = x^3 + 1$, $dt = 3x^2\,dx$, así que $x^2\,dx = \dfrac{dt}{3}$. Queda $\dfrac{1}{3}\int \sqrt{t}\,dt = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\,t^{3/2} = \dfrac{2}{9}(x^3+1)^{3/2} + C$.

2 $t = \operatorname{sen} x$, $dt = \cos x\,dx$. Queda $\int e^t\,dt = e^t + C = e^{\operatorname{sen} x} + C$.

3 $t = \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$. Queda $\int t^2\,dt = \dfrac{t^3}{3} = \dfrac{(\ln x)^3}{3} + C$.

4 El numerador es justo la derivada del denominador. Con $t = x^2 + x + 5$ queda $\displaystyle\int \frac{dt}{t} = \ln|t|$. Como $x^2 + x + 5 > 0$ siempre (su discriminante es $1 - 20 < 0$), el resultado es $\ln(x^2 + x + 5) + C$.

5 $t = x - 1$, $x = t + 1$, $dx = dt$. Queda $\displaystyle\int \frac{t+1}{\sqrt{t}}\,dt = \int \left(t^{1/2} + t^{-1/2}\right)dt = \frac{2}{3}\,t^{3/2} + 2\,t^{1/2}$. Es $\dfrac{2}{3}(x-1)^{3/2} + 2(x-1)^{1/2} + C$.

6 Separas $\operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen}^2 x \cdot \operatorname{sen} x = (1 - \cos^2 x)\operatorname{sen} x$. Con $t = \cos x$, $dt = -\operatorname{sen} x\,dx$, queda $-\int (1 - t^2)\,dt = -t + \dfrac{t^3}{3}$. Es $-\cos x + \dfrac{\cos^3 x}{3} + C$.

7 $t = 1 + \ln x$, $dt = \dfrac{dx}{x}$. Si $x = 1$, $t = 1$; si $x = e$, $t = 2$. Queda $\displaystyle\int_1^2 t^2\,dt = \frac{2^3 - 1^3}{3} = \frac{7}{3}$.

8 $t = x^2$, $dt = 2x\,dx$. Como $x^4 = (x^2)^2 = t^2$ y los límites pasan a 0 y 1, queda $\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{8}$.

9 El valor absoluto cambia en $x = 1$, donde $x^2 - 1 = 0$. En $[0, 1]$ es $|x^2 - 1| = 1 - x^2$, y en $[1, 2]$ es $x^2 - 1$.

Partimos la integral en esos dos trozos:

$$\int_0^2 x\,f(x)\,dx = \int_0^1 x\,\operatorname{sen}\big(\pi(1 - x^2)\big)\,dx + \int_1^2 x\,\operatorname{sen}\big(\pi(x^2 - 1)\big)\,dx$$

Primera integral. $t = 1 - x^2$, $dt = -2x\,dx$, o sea $x\,dx = -\dfrac{dt}{2}$. Si $x = 0$, $t = 1$; si $x = 1$, $t = 0$:

$$\int_1^0 \operatorname{sen}(\pi t)\left(-\frac{dt}{2}\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 \operatorname{sen}(\pi t)\,dt = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\pi t)}{\pi}\right]_0^1 = \frac{1}{2\pi}(1 + 1) = \frac{1}{\pi}$$

Segunda integral. $u = x^2 - 1$, $du = 2x\,dx$. Si $x = 1$, $u = 0$; si $x = 2$, $u = 3$:

$$\frac{1}{2}\int_0^3 \operatorname{sen}(\pi u)\,du = \frac{1}{2}\left[-\frac{\cos(\pi u)}{\pi}\right]_0^3 = \frac{1}{2\pi}\big(-\cos 3\pi + \cos 0\big) = \frac{1}{2\pi}(1 + 1) = \frac{1}{\pi}$$

Sumas las dos: $\dfrac{1}{\pi} + \dfrac{1}{\pi} = \dfrac{2}{\pi}$.

Resultado: $\displaystyle\int_0^2 x\,f(x)\,dx = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}64$

10 En $[1,2]$ se tiene $x \neq 0$, así que simplificas antes de integrar: $\dfrac{f(x)}{x^6} = \dfrac{x^3 e^{-1/x^2}}{x^6} = \dfrac{e^{-1/x^2}}{x^3}$.

Lo «raro» es el exponente, $-\dfrac{1}{x^2} = -x^{-2}$. Su derivada es $2x^{-3} = \dfrac{2}{x^3}$, justo lo que acompaña a la exponencial (salvo el 2). Llamas $t = -\dfrac{1}{x^2}$, y entonces $dt = \dfrac{2}{x^3}\,dx$.

Límites nuevos: si $x = 1$, $t = -1$; si $x = 2$, $t = -\dfrac{1}{4}$.

Sustituyes y aplicas Barrow en t:

$$\int_1^2 \frac{e^{-1/x^2}}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{-1/4} e^t\,dt = \frac{1}{2}\left[e^t\right]_{-1}^{-1/4} = \frac{1}{2}\left(e^{-1/4} - e^{-1}\right)$$

Resultado: $\dfrac{1}{2}\left(e^{-1/4} - e^{-1}\right) \approx 0{,}205$

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98