HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO

Integral definida y áreas

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/integral-definida-area/**

1 Calcula $\int_0^{\pi} \sin x \, dx$.

2 Calcula $\int_1^{e} \frac{1}{x} \, dx$.

3 Calcula $\int_0^{1} e^x \, dx$.

4 Halla el área entre $y = x^2 - 1$ y el eje X.

5 Halla el área del recinto del primer cuadrante entre $y = x$ e $y = x^3$.

6 Calcula $\int_0^2 |x - 1|\, dx$.

7

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · EXTRAORDINARIA 2024

Dada la función $f(x) = x^3 - 3x$, se pide:

a) (0,75 puntos) Estudiar si es par o impar y calcular sus intervalos de crecimiento y de decrecimiento.

b) (1,75 puntos) Calcular el área de la región acotada delimitada por las gráficas de $f(x)$ y de $g(x) = x(x - 3)$.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $\int_1^3 (2x + 1)\, dx$.

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula el área limitada por $f(x) = x^2 - 4$ y el eje X.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Halla el área de la región encerrada entre $f(x) = x^3 - x$ y el eje X.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Integral definida y áreas

1 $\left[-\cos x\right]_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$

2 $\left[\ln x\right]_1^{e} = \ln e - \ln 1 = 1 - 0 = 1.$

3 $\left[e^x\right]_0^{1} = e - 1.$

4 Cortes en $x = \pm 1$; la parábola está bajo el eje en medio.

$\displaystyle\int_{-1}^{1} (x^2 - 1)\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1} = -\frac{4}{3}$. El área es $\dfrac{4}{3}$.

5 Cortes en $x = 0$ y $x = 1$; en medio, $x > x^3$.

$\displaystyle\int_0^1 (x - x^3)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$

6 Parte en $x = 1$: $\displaystyle\int_0^1 (1 - x)\,dx + \int_1^2 (x - 1)\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$

7 **a)** Paridad: $f(-x) = (-x)^3 - 3(-x) = -x^3 + 3x = -f(x)$, así que f es **impar**.

Crecimiento: $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1)$. Es positiva si $x < -1$ o $x > 1$ y negativa en $(-1, 1)$. Luego f **crece** en $(-\infty, -1)$ y en $(1, +\infty)$, y **decrece** en $(-1, 1)$.

b) Primero los puntos de corte: $f(x) = g(x) \;\Rightarrow\; x^3 - 3x = x^2 - 3x \;\Rightarrow\; x^3 - x^2 = 0 \;\Rightarrow\; x^2(x - 1) = 0$. Se cortan en $x = 0$ (que es de contacto, porque la raíz es doble) y en $x = 1$, es decir, en los puntos $(0, 0)$ y $(1, -2)$. La región acotada va de $x = 0$ a $x = 1$.

¿Quién va por encima? Probamos un punto intermedio: $g\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{5}{4} = -1{,}25$ y $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{11}{8} = -1{,}375$. En $(0, 1)$ la parábola g está sobre la cúbica f, y no cambian de orden dentro del intervalo porque no vuelven a cortarse.

El área es la integral de «la de arriba menos la de abajo». Los términos en x se cancelan:

$$A = \int_0^1 \big(g(x) - f(x)\big)dx = \int_0^1 \big(x^2 - x^3\big)dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Resultado: a) impar; crece en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ y decrece en $(-1, 1)$ · **b)** $A = \dfrac{1}{12}$ u^2.

8 Una primitiva de $2x + 1$ es $F(x) = x^2 + x$.

Aplica Barrow:

$$\int_1^3 (2x + 1)\,dx = \left[x^2 + x\right]_1^3 = (9 + 3) - (1 + 1) = 10$$

Resultado: La integral vale 10.

9 Cortes con el eje: $x^2 - 4 = 0$ da $x = \pm 2$. Entre ellos, $f \leq 0$ (la parábola está debajo del eje).

Integral:

$$\int_{-2}^{2} (x^2 - 4)\, dx = \left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{8}{3} - 8\right) - \left(-\frac{8}{3} + 8\right) = -\frac{32}{3}$$

Sale negativa porque la región está bajo el eje. El área es el valor absoluto.

Resultado: Área $= \dfrac{32}{3}$ u^2.

10 Cortes: $x^3 - x = x(x-1)(x+1) = 0$ da $x = -1, 0, 1$. Hay dos recintos.

En $[-1, 0]$ la función es positiva: $\displaystyle\int_{-1}^{0} (x^3 - x)\, dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = 0 - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

En $[0, 1]$ es negativa: $\displaystyle\int_{0}^{1} (x^3 - x)\, dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}$, y su área es $\dfrac{1}{4}$.

Se suman las áreas: $\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{2}$.

Resultado: Área $= \dfrac{1}{2}$ u^2. (La integral de -1 a 1 sería 0.)

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98