HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO · SELECTIVIDAD

Distancias y ángulos en el espacio

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/distancias-angulos-espacio/**

1 Distancia del punto $P(0,1,2)$ a la recta $(x,y,z) = (1,1,0) + \lambda\,(0,1,1)$.

2 Distancia entre los planos $x - 2y + 2z = 3$ y $2x - 4y + 4z + 9 = 0$.

3 Distancia entre las rectas paralelas $r:\ (1,0,1) + \lambda\,(1,2,0)$ y $s:\ (0,1,3) + \mu\,(2,4,0)$.

4 Distancia entre $r:\ x = y = z$ y $s:\ (x,y,z) = (1,0,0) + \mu\,(0,1,0)$.

5 Ángulo entre dos rectas de directores $(1, -1, 2)$ y $(2, 1, -1)$.

6 Ángulo entre la recta de director $(2, -1, 2)$ y el plano $x + 2y + 2z = 7$.

7 Ángulo entre los planos $x + y - 3 = 0$ y $x + z + 1 = 0$.

8 SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2026 (COINCIDENTES)

Sea r la recta que pasa por $A(1, 2, -5)$ y $B(2, 4, -11)$, sea s la recta dada por la intersección de los planos $x - 2y + 3z = 3$ y $x - y = 0$, y sea t la recta paralela a s que pasa por $C(1, 0, 0)$.

a) (1 punto) Determine la posición relativa de r y s.

b) (1 punto) Responda solo a uno de los dos apartados siguientes: **b1)** Halle la distancia entre s y t. **b2)** Halle el coseno del ángulo que forman r y s.

9

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2022

Con un dispositivo láser situado en el punto $P(1, 1, 1)$ se ha podido seguir la trayectoria de una partícula que se desplaza sobre la recta $r \equiv \begin{cases} 2x - y = 10 \\ x - z = -90 \end{cases}$.

c) (0,75 puntos) Determine el ángulo entre el plano de ecuación $x + y = 2$ y la recta r.

10

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · EXTRAORDINARIA 2025

Sean los puntos $A(1, 1, 2)$, $B(2, -1, 0)$, $C(-2, 0, 3)$ y $D(2, -3, -1)$ y la recta $r \equiv \dfrac{x-1}{2} = y + 1 = \dfrac{z}{-1}$.

c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Distancias y ángulos en el espacio

1 $A(1,1,0)$, $\vec{v}=(0,1,1)$, $\overrightarrow{AP}=(-1,0,2)$.

$\overrightarrow{AP}\times\vec{v}=(0\cdot 1-2\cdot 1,\ 2\cdot 0-(-1)\cdot 1,\ (-1)\cdot 1-0\cdot 0)=(-2,1,-1)$, de módulo $\sqrt{6}$.

$d=\dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}}=\sqrt{3}\approx 1{,}73$.

2 Son paralelos (normales proporcionales). Un punto del primero: $(3,0,0)$.

$d=\dfrac{|2\cdot 3+9|}{\sqrt{4+16+16}}=\dfrac{15}{6}=\dfrac{5}{2}=2{,}5$.

3 Los directores son proporcionales: paralelas. Tomas $A(1,0,1)\in r$ y $B(0,1,3)\in s$, con $\overrightarrow{AB}=(-1,1,2)$ y $\vec{v}=(1,2,0)$.

$\overrightarrow{AB}\times\vec{v}=(-4,2,-3)$, de módulo $\sqrt{29}$. Y $\|\vec{v}\|=\sqrt{5}$.

$d=\sqrt{\dfrac{29}{5}}\approx 2{,}41$.

4 $A(0,0,0)$, $\vec{u}=(1,1,1)$; $B(1,0,0)$, $\vec{v}=(0,1,0)$. $\overrightarrow{AB}=(1,0,0)$.

$\vec{u}\times\vec{v}=(-1,0,1)$, módulo $\sqrt{2}$. Mixto: $(1,0,0)\cdot(-1,0,1)=-1$.

Es distinto de 0: se cruzan. $d=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\approx 0{,}71$.

5 Escalar: $2-1-2=-1$. Módulos: $\sqrt{6}$ y $\sqrt{6}$.

$\cos\theta=\dfrac{|-1|}{6}=\dfrac{1}{6}\Rightarrow\theta\approx 80{,}4^\circ$.

6 $\vec{n}=(1,2,2)$. Escalar: $2-2+4=4$. Módulos: 3 y 3.

$\operatorname{sen}\theta=\dfrac{4}{9}\Rightarrow\theta\approx 26{,}4^\circ$.

7 Normales $(1,1,0)$ y $(1,0,1)$. Escalar: 1. Módulos: $\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

$\cos\theta=\dfrac{1}{2}\Rightarrow\theta=60^\circ$.

8 **Datos de las rectas.** $\vec{v}_r = \overrightarrow{AB} = (1, 2, -6)$. Para s, el director es el producto vectorial de las normales de los dos planos, $(1, -2, 3) \times (1, -1, 0) = (3, 3, 1)$. Un punto de s: con $x = y = 0$ la primera ecuación da $3z = 3$, o sea $P_s(0, 0, 1)$.

a) Los directores $(1, 2, -6)$ y $(3, 3, 1)$ no son proporcionales. Se mira si son coplanarias con el determinante de $\vec{v}_r$, $\vec{v}_s$ y $\overrightarrow{AP_s} = (-1, -2, 6)$:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -6 \\ 3 & 3 & 1 \\ -1 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (18 + 2) - 2 \cdot (18 + 1) - 6 \cdot (-6 + 3) = 20 - 38 + 18 = 0$$

El determinante es 0 y no son paralelas: las rectas son coplanarias y **se cortan**.

b1) t es paralela a s (mismo director), luego la distancia entre s y t es la de C a la recta s. Con $\overrightarrow{CP_s} = (-1, 0, 1)$:

$$\overrightarrow{CP_s} \times \vec{v}_s = (-3, 4, -3) \;\Rightarrow\; d = \frac{\sqrt{9 + 16 + 9}}{\sqrt{9 + 9 + 1}} = \sqrt{\frac{34}{19}} = \frac{\sqrt{646}}{19} \approx 1{,}34$$

b2) Coseno del ángulo entre r y s, con $\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s = 3 + 6 - 6 = 3$:

$$\cos\theta = \frac{|3|}{\sqrt{1 + 4 + 36}\,\sqrt{9 + 9 + 1}} = \frac{3}{\sqrt{41}\sqrt{19}} = \frac{3}{\sqrt{779}} \approx 0{,}107$$

Resultado: a) se cortan · **b1)** $d(s, t) = \dfrac{\sqrt{646}}{19} \approx 1{,}34$ · **b2)** $\cos\theta = \dfrac{3}{\sqrt{779}} \approx 0{,}107$

9 Director de r: producto vectorial de las normales de los dos planos que la definen:

$$(2, -1, 0) \times (1, 0, -1) = (1,\ 2,\ 1)$$

Normal del plano $x + y = 2$: $\vec{n} = (1, 1, 0)$. Producto escalar: $\vec{v} \cdot \vec{n} = 1 + 2 + 0 = 3$. Módulos: $\|\vec{v}\| = \sqrt{6}$ y $\|\vec{n}\| = \sqrt{2}$.

Con el seno (ángulo de la recta con el plano):

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{3}{\sqrt{6}\,\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{12}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \;\Rightarrow\; \theta = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$$

El solucionario oficial calcula el coseno con la normal, $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, es decir, $\alpha = 30^\circ$ con la normal, y resta: $\dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\pi}{3}$.

Resultado: El ángulo entre la recta y el plano es $60^\circ = \dfrac{\pi}{3}$ radianes

10 De r sacas un punto, $P_r(1,-1,0)$, y el director, $\vec{v}_r=(2,1,-1)$. La otra recta pasa por B y tiene director $\overrightarrow{BD}=(0,-2,-1)$.

No son paralelas, porque $(2,1,-1)$ y $(0,-2,-1)$ no son proporcionales. Vector de unión: $\overrightarrow{P_rB}=(1,0,0)$.

Producto vectorial y mixto:

$$\vec{v}_r\times\overrightarrow{BD}=(-3,\,2,\,-4)\qquad\left[\overrightarrow{P_rB},\vec{v}_r,\overrightarrow{BD}\right]=(1,0,0)\cdot(-3,2,-4)=-3$$

El mixto no es 0: las rectas se cruzan. Con $\|(-3,2,-4)\|=\sqrt{9+4+16}=\sqrt{29}$:

$$d=\frac{|-3|}{\sqrt{29}}=\frac{3}{\sqrt{29}}=\frac{3\sqrt{29}}{29}\approx 0{,}56$$

Es el mismo valor del solucionario oficial, que construye el plano $-3x+2y-4z+5=0$ (contiene a r y es paralelo a BD) y mide la distancia de B a ese plano.

Resultado: $d=\dfrac{3\sqrt{29}}{29}\approx 0{,}56$

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98