HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 1.º Y 2.º DE BACHILLERATO

Determinantes de matrices

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/determinantes-matrices/**

1 Calcula $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix}$.

2 Calcula con Sarrus $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix}$.

3 ¿Para qué valores de k tiene inversa $\begin{pmatrix} k & 3 \\ 2 & k+1 \end{pmatrix}$?

4 Si A es 3×3 y $|A| = 5$, calcula $|2A|$, $|A^2|$ y $|A^{-1}|$.

5

Calcula $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ y explica el resultado.

6

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · ORDINARIA 2026

Dada la matriz real $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda - 2 & \lambda \\ 0 & 1 & \lambda - 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se pide:

a) (1 punto) Discutir el rango de A en función del parámetro λ.

b) (1 punto) Para el caso $\lambda = 2$, resolver la ecuación matricial $A^2 - AX = I$, donde I es la matriz identidad de orden 3.

7

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula el determinante de $B = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Calcula $|M|$ con $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Con $|M| = -19$ (la matriz de antes), calcula el determinante si cambiamos las dos primeras filas, si multiplicamos la primera fila por 3 y si multiplicamos toda la matriz por 2. Calcula también el de $T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Halla los valores de k para los que $A = \begin{pmatrix} k & 4 \\ 1 & k \end{pmatrix}$ no tiene inversa. Calcula la inversa de $D = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Determinantes de matrices

1 $4 \cdot 5 - (-3) \cdot 2 = 20 + 6 = 26$.

2 Suman: $1 \cdot 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 4 = 1 + 0 + 24 = 25$.

Restan: $2 \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 0 \cdot 3 \cdot 1 = 4 - 4 + 0 = 0$.

Determinante: $25 - 0 = 25$.

3 $|A| = k(k+1) - 6 = k^2 + k - 6 = (k+3)(k-2)$.

No tiene inversa si $k = -3$ o $k = 2$.

4 $|2A| = 2^3 \cdot 5 = 40$. $|A^2| = 5 \cdot 5 = 25$. $|A^{-1}| = \dfrac{1}{5}$.

5 Suman: $45 + 84 + 96 = 225$. Restan: $105 + 48 + 72 = 225$. El determinante es 0.

La tercera fila es el doble de la segunda menos la primera, así que las filas dependen unas de otras.

6 **a)** El determinante dice cuándo el rango es 3. Desarrollamos por la primera columna (con la regla de Sarrus sale lo mismo): $|A| = 1 \cdot \big(1 \cdot 1 - 0\big) - 0 + 1 \cdot \big((\lambda - 2)(\lambda - 1) - \lambda \cdot 1\big) = 1 + \lambda^2 - 3\lambda + 2 - \lambda = \lambda^2 - 4\lambda + 3$.

Es una ecuación de segundo grado, y se factoriza:

$$|A| = \lambda^2 - 4\lambda + 3 = (\lambda - 1)(\lambda - 3)$$

Si $\lambda \neq 1$ y $\lambda \neq 3$, el determinante no es cero y $\operatorname{rango}(A) = 3$.

Si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$, el determinante es cero y el rango es menor que 3. Pero no es 1: las filas segunda y tercera, $(0, 1, \lambda - 1)$ y $(1, 0, 1)$, no son proporcionales para ningún λ, así que son independientes y el rango es 2.

b) Con $\lambda = 2$, $|A| = -1 \neq 0$ y $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa, que sale con la adjunta: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ (se comprueba multiplicando $AA^{-1} = I$).

Despejamos X con cuidado con el lado: $A^2 - AX = I \;\Rightarrow\; AX = A^2 - I$. Multiplicamos por A^{-1} **por la izquierda**: $X = A^{-1}(A^2 - I) = A - A^{-1}$, porque $A^{-1}A^2 = A$ y $A^{-1}I = A^{-1}$.

Restamos:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Comprobación: $AX = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $A^2 - I = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix} - I = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Coinciden.

Resultado: a) rango 3 si $\lambda \neq 1, 3$; rango 2 si $\lambda = 1$ o $\lambda = 3$ · **b)** $X = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

7 Diagonal principal: $(-2)\cdot(-3)=6$. Mete cada negativo entre paréntesis.

Otra diagonal: $7\cdot 1=7$.

Resta la segunda a la primera:

$$|B|=6-7=-1$$

Resultado: $|B|=-1$

8 Productos que suman:

$$2\cdot(-1)\cdot 5+1\cdot 4\cdot 1+3\cdot 0\cdot 2=-10+4+0=-6$$

Productos que restan:

$$3\cdot(-1)\cdot 1+2\cdot 4\cdot 2+1\cdot 0\cdot 5=-3+16+0=13$$

Resta el segundo total al primero:

$$|M|=-6-13=-19$$

Resultado: $|M|=-19$

9 Cambiar dos filas cambia el signo: el determinante pasa a ser 19.

Multiplicar una fila por 3 multiplica el determinante por 3: $3\cdot(-19)=-57$.

Multiplicar toda la matriz 3×3 por 2 multiplica por 2^3: $8\cdot(-19)=-152$.

T es triangular: el determinante es el producto de la diagonal, sin Sarrus:

$$|T|=2\cdot 3\cdot 4=24$$

Resultado: 19, -57, -152 y $|T|=24$

10 Determinante de A:

$$|A|=k\cdot k-4\cdot 1=k^2-4$$

No tiene inversa cuando $k^2-4=0$, es decir, $k=2$ o $k=-2$.

Para D: $|D|=2\cdot 3-1\cdot 5=1$, distinto de cero.

Aplica la fórmula con $|D|=1$:

$$D^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$$

Comprueba: la primera fila de D por la primera columna de D^{-1} da $2\cdot 3+1\cdot(-5)=1$, y por la segunda columna, $2\cdot(-1)+1\cdot 2=0$. Sale la identidad.

Resultado: Sin inversa si $k=\pm 2$. Inversa de D: $\begin{pmatrix}3 & -1\\ -5 & 2\end{pmatrix}$

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98