HOJA DE EJERCICIOS · MATEMÁTICAS · 2.º DE BACHILLERATO; CAE EN SELECTIVIDAD

Continuidad de funciones

Intenta cada ejercicio por tu cuenta, en el hueco de debajo. Las soluciones, paso a paso, están al final de la hoja. La teoría, los ejemplos explicados y un test rápido están en la guía: **metodonmv.com/profesores-clases-matematicas/continuidad-funciones/**

1 ¿Dónde es continua $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2-9}$ y qué tipo de discontinuidad tiene?

2 Clasifica la discontinuidad en $x = 1$ de $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$.

3 Estudia la continuidad en $x = 3$ de $f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x < 3 \\ x+4 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

4 Estudia la continuidad en $x = 2$ de $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{si } x < 2 \\ x^2 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

5

Halla k para que $f(x) = \begin{cases} kx + 1 & \text{si } x \leq 2 \\ x^2 - 1 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ sea continua en $x = 2$.

6

Estudia las discontinuidades de $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$.

7

SELECTIVIDAD DE MADRID · MATEMÁTICAS II · EXTRAORDINARIA 2022

Sea la función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x + 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ x^2 - 4x + 3 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$.

a) (0,75 puntos) Estudie la continuidad de $f(x)$ en $\mathbb{R}$.

b) (0,25 puntos) ¿Es $f(x)$ derivable en $x = 0$? Justifique la respuesta.

c) (0,75 puntos) Calcule, si existen, las ecuaciones de sus asíntotas horizontales y verticales.

d) (0,75 puntos) Determine para $x \in (0, \infty)$ el punto de la gráfica de $f(x)$ en el que la pendiente de la recta tangente es nula y obtenga la ecuación de la recta tangente en dicho punto. En el punto obtenido, ¿alcanza $f(x)$ algún extremo relativo? En caso afirmativo, clasifíquelo.

8

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Estudia la continuidad en $x = 2$ de $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ 3x - 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$

9

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Clasifica la discontinuidad en $x = 2$ de $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x - 2}$.

10

EJEMPLO DE LA GUÍA: REHAZLO SIN MIRAR

Clasifica la discontinuidad de $h(x) = \begin{cases} x + 1 & \text{si } x < 1 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$ en $x = 1$ y la de $g(x) = \dfrac{1}{x - 3}$ en $x = 3$.

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98

SOLUCIONES

Continuidad de funciones

1 Es una fracción: es continua salvo donde el denominador vale 0, es decir, en $x = 3$ y $x = -3$.

En $x = 3$ el numerador vale 4 y en $x = -3$ vale -2, no se anulan. Los límites son infinitos.

Continua en $\mathbb{R} - \{-3, 3\}$, con saltos infinitos en $x = \pm 3$.

2 $\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1$ para $x \neq 1$, así que $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.

$f(1)$ no existe: discontinuidad evitable, redefiniendo $f(1) = 2$.

3 Por la izquierda: $2 \cdot 3 + 1 = 7$. Por la derecha: $3 + 4 = 7$. Y $f(3) = 3 + 4 = 7$.

Los tres coinciden: es continua en $x = 3$.

4 Por la izquierda: $2 - 1 = 1$. Por la derecha: $2^2 = 4$.

Los laterales son distintos: salto finito, de $4 - 1 = 3$.

5 Por la izquierda y en el punto: $f(2) = 2k + 1$. Por la derecha: $\lim\limits_{x \to 2^+} (x^2 - 1) = 3$.

Igualamos: $2k + 1 = 3$, luego $k = 1$.

6 El denominador es $(x - 2)(x + 2)$, que se anula en $x = 2$ y $x = -2$.

En $x = 2$: $\dfrac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \dfrac{1}{x+2}$, con límite $\dfrac{1}{4}$. Discontinuidad evitable.

En $x = -2$: el numerador vale -4 y el denominador tiende a 0. Salto infinito.

7 **a)** Cada trozo es continuo en su zona: $\dfrac{2x+1}{x}$ lo es salvo en $x = 0$, que no está en $x < 0$, y el polinomio lo es siempre. El único punto sospechoso es $x = 0$, donde hay que comparar el valor y los dos límites laterales.

El valor es $f(0) = 0^2 - 0 + 3 = 3$. Por la derecha, $\lim_{x \to 0^+}(x^2 - 4x + 3) = 3$. Por la izquierda, el numerador $2x + 1$ tiende a 1 y el denominador a 0^- (es negativo), así que $\lim_{x \to 0^-} \dfrac{2x+1}{x} = -\infty$.

Un límite lateral infinito rompe la continuidad: f **no es continua en** $x = 0$ (discontinuidad de salto infinito). Es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

b) No es derivable en $x = 0$: derivable implica continua, y aquí no lo es.

c) Hacia $+\infty$ la función es el polinomio $x^2 - 4x + 3 \to +\infty$: no hay horizontal por la derecha. Hacia $-\infty$, $\dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x} \to 2$, así que $y = 2$ es asíntota horizontal por la izquierda.

La vertical es $x = 0$, porque el límite por la izquierda es $-\infty$ (el trozo de la derecha no la produce, ya que allí el límite es 3).

d) Para $x > 0$, $f'(x) = 2x - 4 = 0$ en $x = 2$. El punto es $(2, f(2)) = (2, -1)$, y como la pendiente es cero, la tangente es la recta horizontal $y = -1$.

Signo de f': negativa en $(0, 2)$ y positiva en $(2, \infty)$. Pasa de decrecer a crecer, luego $(2, -1)$ es un **mínimo relativo**.

Resultado: a) continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$; en $x = 0$ salto infinito · **b)** no derivable en 0 · **c)** horizontal $y = 2$ (en $-\infty$) y vertical $x = 0$ · **d)** punto $(2, -1)$, tangente $y = -1$, mínimo relativo.

8 Límite por la izquierda (usa la fórmula de $x < 2$):

$$\lim_{x \to 2^-} (x^2 + 1) = 4 + 1 = 5$$

Límite por la derecha (usa la de $x \geq 2$):

$$\lim_{x \to 2^+} (3x - 1) = 6 - 1 = 5$$

Valor de la función: $f(2) = 3 \cdot 2 - 1 = 5$ (el 2 entra en el trozo de $x \geq 2$).

Los tres valores coinciden.

Resultado: f es continua en $x = 2$

9 En $x = 2$ no existe $f(2)$ (sale $\frac{0}{0}$): hay discontinuidad.

Calcula el límite. Factoriza el numerador y simplifica:

$$\lim_{x \to 2} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim_{x \to 2} (x + 2) = 4$$

El límite existe y es finito, pero la función no está definida en 2: es **evitable**. Se arregla definiendo $f(2) = 4$.

Resultado: Discontinuidad evitable en $x = 2$ (límite 4)

10 Para h: $\lim_{x \to 1^-} (x + 1) = 2$ y $\lim_{x \to 1^+} (x^2 + 2) = 3$. Los laterales existen pero son distintos.

Es un **salto finito**, de $3 - 2 = 1$. (Y $h(1) = 3$, pero eso no la salva: sin límite no hay continuidad.)

Para g: cerca de 3, el denominador es muy pequeño. Si x es un poco menor que 3, $x - 3$ es un negativo pequeño y g es muy negativa; si es un poco mayor, g es muy positiva.

Los límites laterales son infinitos:

$$\lim_{x \to 3^-} \frac{1}{x-3} = -\infty \qquad \lim_{x \to 3^+} \frac{1}{x-3} = +\infty$$

Resultado: h: salto finito (de 1) en $x = 1$; g: salto infinito en $x = 3$ (asíntota vertical)

¿Se atasca con estos ejercicios? Reserva una llamada de 15 minutos y vemos dónde se pierde. Tú eliges día y hora.

metodonmv.es/llamada
o WhatsApp 611 60 89 98